

強 Lefschetz でない Artin Gorenstein 環を作る マトロイドの基底母関数

東北大学 大学院理学研究科 数学専攻
高橋 諒 (Ryo TAKAHASHI) *

概要

次数付き Artin Gorenstein 環は斉次多項式を使った表示を持ち、そのような環の強 Lefschetz 性は斉次多項式の高次ヘッセ行列の正則性で特徴付けられる。前野・沼田は、この斉次多項式がマトロイドの基底母関数であったとき強 Lefschetz 性を持つと予想したが、我々はグラフ的マトロイドによる反例を与えた。高次ヘッセ行列の非正則性を示すため、行列のカーネルに属する非ゼロ要素を具体的に計算した。

本講演は [11] の内容に基づく。1 章から 4 章でそれぞれ次数付き Artin Gorenstein 環、強 Lefschetz 性、基底母関数、前野・沼田の予想について導入し、最後に 5 章で主結果について述べる。この分野の教科書として [3] を大いに参考にした。

1 Artin Gorenstein 環

この章ではまず本研究で扱う次数付き環を定義し、次にそれが持つ性質について見る。

1.1 次数付き環

$f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ を n 変数 d 次斉次多項式とし、偏微分作用素 $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ たちの多項式環 $Q := \mathbb{R}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ における f の *annihilator* を

$$\text{Ann}(f) := \{\alpha \in Q \mid \alpha f = 0\}$$

とする。 $\alpha \in Q$ の f への作用は通常の偏微分によって行われる。 f が斉次であることから $\text{Ann}(f)$ は**斉次イデアル**、すなわち斉次元によって生成されるイデアルである。そこで商環

$$A = A(f) := Q/\text{Ann}(f)$$

を考える。

$\alpha \in Q$ に対し、 $\alpha + \text{Ann}(f) \in A$ の f への作用もまた αf と定める。さらに α が斉次元で $\alpha f \neq 0$ のとき、 $\alpha + \text{Ann}(f) \in A$ を A における $\deg \alpha$ 次の斉次元と見なす。これらは well-defined で

* E-mail:ryo.takahashi.r2@dc.tohoku.ac.jp

ある．特に後者は $\text{Ann}(f)$ が斉次イデアルであることから言える．以降，誤解の生じない範囲で $\alpha + \text{Ann}(f) \in A$ を単に $\alpha \in A$ と書き， Q の元を用いて表示する．

先ほどの斉次元の定義により， A も多項式環 Q と同様次数付き環として

$$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_d$$

と表示することができる．ここに A_i は A の i 次斉次元と 0 からなる $\mathbb{R}$ -加群である． Q における $d+1$ 次以上の斉次元はすべて $\text{Ann}(f)$ に入るため， $i > d$ に対して $A_i = \{0\}$ である．

1.2 ポアンカレ双対性

A ，並びに各 A_i は極小な生成系を取って基底とすることでベクトル空間の構造を持つ． A は次の性質を満たすことが知られている：

- 線形写像

$$A_d \rightarrow \mathbb{R}; \quad \alpha \mapsto \alpha f$$

は A_d から $\mathbb{R}$ への同型写像である．

- $i = 0, \dots, d$ に対し双線形形式

$$A_i \times A_{d-i} \rightarrow A_d \cong \mathbb{R}; \quad (\xi, \eta) \mapsto \xi \eta$$

は非退化．

これらの性質を次数付き環における**ポアンカレ双対性**という．

A はベクトル空間として有限次元であるため **Artin 環**である．このとき A がポアンカレ双対性を満たすことと A が **Gorenstein 環**であることは同値 ([3, Theorem 2.79])．したがって A は Artin Gorenstein 環である．逆に，任意の次数付き Artin Gorenstein 環は斉次多項式 f を用いた $A(f)$ という表示を持つ ([3, Lemma 3.74])．

Example 1.1. $f = x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_2^2 x_5$ とする．これは [3, Example 3.78] にある多項式と同一である．

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_3 f &= 2 \partial_2 \partial_4 f = 2x_1, \\ 2 \partial_1 \partial_4 f &= \partial_2 \partial_5 f = 2x_2, \\ \partial_1^2 f &= 2x_3, \\ \partial_1 \partial_2 f &= x_4, \\ \partial_2^2 f &= 2x_5 \end{aligned}$$

であり， $A = A(f)$ について A_1 ， A_2 の基底としてそれぞれ

$$\{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5\}, \quad \{\partial_1^2, \partial_1 \partial_2, \partial_1 \partial_3, \partial_1 \partial_4, \partial_2^2\}$$

を取れる．この基底に関して双線形形式 $A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ を行列表示すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が得られ，行列式は 8 である．したがってこの双線形形式は非退化．

2 強 Lefschetz 性

この章では強 Lefschetz 性を定義し，またその成立を判定するための高次ヘッセ行列を用いた定理を紹介する．

2.1 強 Lefschetz 性の定義

次数付き環 $A = \bigoplus_{i=0}^d A_i$ における強 Lefschetz 性を定義する．

Definition 2.1 (強 Lefschetz 性). ある $\ell \in A_1$ が存在し，掛け算写像

$$\times \ell^i: A_k \rightarrow A_{k+i}$$

がすべての $k = 0, \dots, d-1$, $i = 1, \dots, d-k$ でフルランクとなるとき， A は強 Lefschetz 性を持つといい，また ℓ を *Lefschetz 元* と呼ぶ．

またこの条件を $i = 1$ のみに弱めたものを弱 Lefschetz 性という．

今， A はポアンカレ双対性を持つため，特にすべての i で $\dim A_i = \dim A_{d-i}$ である．このとき強 Lefschetz 性は，次の狭義の場合がすべての k で成立することと同値になる．

Definition 2.2 (狭義の強 Lefschetz 性). $k \leq d/2$ を非負整数とする．ある $\ell \in A_1$ が存在して掛け算写像

$$\times \ell^{d-2k}: A_k \rightarrow A_{d-k}$$

が同型写像となるとき， A は ℓ に関して k 次の強 Lefschetz 性 (*strong Lefschetz property*, SLP_k) を持つという．

A がすべての $k \leq d/2$ について，ある共通の $\ell \in A_1$ に関して SLP_k を持つならば，

$$\begin{aligned} A_k &\xrightarrow{\times \ell^i} A_{k+i} \xrightarrow{\times \ell^{d-2k-i}} A_{d-k} & (k+i \leq d-k) \\ A_{d-k-i} &\xrightarrow{\times \ell^{2k+i-d}} A_k \xrightarrow{\times \ell^i} A_{k+i} & (k+i > d-k) \end{aligned}$$

という同型写像を考えることで， ℓ を Lefschetz 元とした狭義でない強 Lefschetz 性の成立が従う．さらにすべての k で SLP_k を持てば共通の ℓ が取れることが Remark 2.5 によりわかる．

2.2 強 Lefschetz 性の判定

ポアンカレ双対性にある非退化な双線形形式を用いて、狭義の強 Lefschetz 性の成立を判定することができる。準備として高次ヘッセ行列を導入する。

Definition 2.3 (高次ヘッセ行列). k を非負整数, $B_k = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset Q$ を k 次斉次多項式の集合とする. 多項式 g の k 次ヘッセ行列 $H_{B_k}(g)$ を

$$(H_{B_k}(g))_{i,j} := (\alpha_i \alpha_j)g \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

として定める.

$B_1 = \{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ のとき, $H_{B_1}(g)$ は通常 of ヘッセ行列と一致する.

Theorem 2.4 ([3, Theorem 3.76],[6, Theorem 3.1],[13, Theorem 4]). $k \leq d/2$ を非負整数とし, $B_k = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ をベクトル空間 A_k の基底とする. $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ について, A が $\ell = a_1 \partial_1 + \dots + a_n \partial_n \in A_1$ に関して SLP_k を持つことと, $H_{B_k}(f)(a_1, \dots, a_n)$ が正則であることは同値.

双線形形式

$$A_k \times A_k \rightarrow A_d \cong \mathbb{R}; \quad (\xi, \eta) \mapsto \ell^{d-2k} \xi \eta$$

の基底 B_k に関する表現行列が, 斉次関数におけるオイラーの定理より $(d-2k)! H_{B_k}(f)(a_1, \dots, a_n)$ となることから示される.

Remark 2.5. A が SLP_k を持つことと多項式行列 $H_{B_k}(f)$ が正則であること, すなわち $\det H_{B_k}(f) \neq 0$ であることは同値. 特にすべての k で SLP_k を持てば, 非ゼロ多項式 $\det H_{B_0}(f), \dots, \det H_{B_{\lfloor d/2 \rfloor}}(f)$ で共通して根でない点 $(a_1, \dots, a_n)$ が存在し, $\ell = a_1 \partial_1 + \dots + a_n \partial_n$ を Lefschetz 元として A は強 Lefschetz 性を持つ.

Example 2.6 ([3, Example 3.78]). Example 1.1 と同様 $f = x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_2^2 x_5$ とすると, $A = A(f)$ は SLP_1 を持たない. 実際, A_1 の基底 $B_1 = \{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5\}$ に対し

$$H_{B_1}(f) = \begin{pmatrix} 2x_3 & x_4 & 2x_1 & x_2 & 0 \\ x_4 & 2x_5 & 0 & x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり, その行列式は 0 となる. この事実は

$$H_{B_1}(f) \times (0, 0, x_2^2, -2x_1 x_2, x_1^2)^T = \mathbf{0}$$

であることから観察できる.

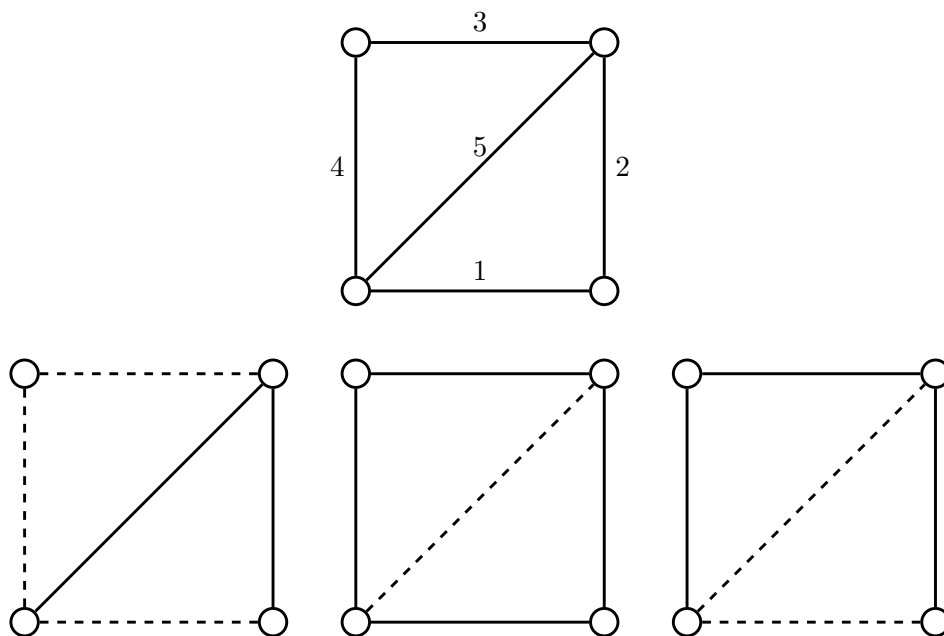


図1 上段：4 頂点 5 辺のグラフ，下段左：極大でないため基底でない，下段中央：独立集合でない，下段右：基底の一つ (対応する単項式は $x_2x_3x_4$)

3 マトロイドと基底母関数

この章では本研究で扱う基底母関数をグラフ，マトロイドに対して定義する．

3.1 グラフの基底母関数

グラフ G を， $d+1$ 頂点 n 辺の連結な無向グラフで自己ループや多重辺を持たないものとする．辺には番号 $1, \dots, n$ を割り振り，辺集合を $E := \{1, \dots, n\}$ と書く．

辺の部分集合 $I \subset E$ が**独立集合**であるとは， I に含まれる辺のみからなる閉路がないことを言う．さらに包含関係について極大な独立集合のことを**基底**と呼ぶ．基底とはマトロイドにおける用語であり，グラフ理論においては**全域木**と対応する．グラフ G の連結性より基底のサイズは必ず d となる．そこでグラフ G の**基底母関数** $f_G \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ を

$$f_G := \sum_{I: \text{基底}} \prod_{e \in I} x_e$$

と定めると，これは d 次斉次多項式となる．

3.2 マトロイドについて

グラフ G に対し，独立集合のみを集めた E の部分集合族を $\mathcal{I}$ とすると， $\mathcal{I}$ は次の性質を満たす：

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$

2. $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subset X$ のとき, $Y \in \mathcal{I}$

3. $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ のとき, ある $e \in X \setminus Y$ が存在して $Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

このとき組 $(E, \mathcal{I})$ を**マトロイド**と呼ぶ. 特にグラフから定められたため**グラフ的マトロイド**とも呼ぶ.

一般にマトロイド $M = (E, \mathcal{I})$ とは, 有限集合 E と, その部分集合族 $\mathcal{I}$ であって先ほどの三つの条件を満たすものの組である. 例えば E をベクトル空間の元の有限部分集合とし, 部分集合 $I \subset E$ が $I \in \mathcal{I}$ であることをその線形独立性によって定めたときも三つの条件を満たす.

$\mathcal{I}$ の元のうち極大なものを**基底**と呼ぶ. 三つ目の条件からすべての基底はサイズが等しい. マトロイド M に対する基底母関数 f_M もグラフに対するものと同様に定義される.

4 前野-沼田の予想

この章では本研究で取り組んだ予想とその応用について述べる.

4.1 予想と先行研究

Conjecture 4.1 ([4, 5]). 任意のマトロイド M について, 次数付き環 $A(f_M)$ は強 Lefschetz 性を持つ.

Theorem 2.4 による SLP_1 と通常のヘッセ行列の関係から, 1 次の強 Lefschetz 性については [7, 8, 14] などの先行研究がある. 最も一般的な結果として, [7, Theorem 3.8 and Remark 3.9] により, 任意のマトロイド M とすべての $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ について, $A(f_M)$ は $\ell = a_1 \partial_1 + \dots + a_n \partial_n$ を Lefschetz 元として SLP_1 を持つことが知られている. 一方 2 次以降の強 Lefschetz 性については, 現在限られたクラスのマトロイドで示されているのみである.

Example 4.2. $E = \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{I} = 2^E$ とすると, $M = (E, \mathcal{I})$ はマトロイドであり, その基底は E 自身のみであるから $f_M = x_1 \dots x_n$ となる. このとき $\text{Ann}(f_M)$ は $\{\partial_i^2 \mid i = 1, \dots, n\}$ によって生成され, [2] によれば $A(f_M)$ は $\ell = \partial_1 + \dots + \partial_n \in A_1$ を Lefschetz 元として強 Lefschetz 性を持つ.

4.2 Example 4.2 の応用

この章の内容について, 詳しくは [3, Section 1.4] を参照されたい.

$\mathcal{I}_k$ を $E = \{1, \dots, n\}$ の k 元集合全体とする. $\mathcal{I} = \bigsqcup_{k=0}^n \mathcal{I}_k$ である. $k < n/2$ に対して掛け算写像 $\times \ell: A_k \rightarrow A_{k+1}$ は単射であるが, 各 $I \in \mathcal{I}_k$ に対して

$$\ell \times \prod_{e \in I} \partial_e = \sum_{\substack{I' \in \mathcal{I}_{k+1} \\ I' \supset I}} \prod_{e \in I'} \partial_e \quad (\in A_{k+1})$$

の項からうまく一つ選ぶことにより, 単射な写像 $\mu_k: \mathcal{I}_k \rightarrow \mathcal{I}_{k+1}$ であってすべての $I \in \mathcal{I}_k$ に対し $\mu_k(I) \supset I$ となるようなものが構成できる.

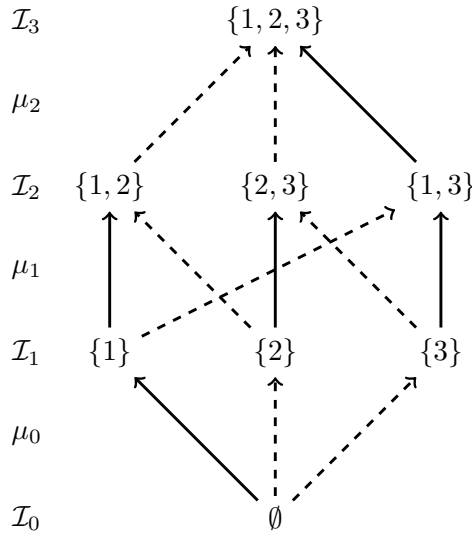


図2 $n = 3$ に対する μ_k たち (点線は μ_k を構成する操作において選ばなかった項を表す)

これをすべての $k < n/2$ に対して行い, さらに $k \geq n/2$ に対しても $\mathcal{I}_k$ と $\mathcal{I}_{k+1}$ を入れ替えて同様のことを行う. $n = 3$ のときの一例を図2に示した. この図において実線の矢印をつなぐことによって,

$$\begin{aligned} C_1: \emptyset &\subset \{1\} \subset \{1, 2\}, \\ C_2: \{2\} &\subset \{2, 3\}, \\ C_3: \{3\} &\subset \{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

として, 包含関係に関する全順序部分集合による $\mathcal{I}$ の分割が構成できる. この分割のサイズは $\max_k |\mathcal{I}_k|$ であり, 特に μ_k たちの存在から $|\mathcal{I}_{\lfloor n/2 \rfloor}|$ である. このことから次の定理が従う.

Theorem 4.3 (Sperner の定理 [10]). $\mathcal{I} = 2^E$ を包含関係による半順序集合と見る. 部分集合 $A \subset \mathcal{I}$ が反鎖であるとは, 任意の $X, Y \in A$ について $X \neq Y$ なら $X \not\subset Y$ かつ $X \not\supset Y$ であることをいう. このとき

$$\max_{A: \text{反鎖}} |A| = \max_k |\mathcal{I}_k| \quad \left(= |\mathcal{I}_{\lfloor n/2 \rfloor}| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \right).$$

$\mathcal{I}_k$ 自身も反鎖であるから, 非自明なのは不等式 $\max_A |A| \leq \max_k |\mathcal{I}_k|$ である. これは任意の反鎖 A と任意の全順序部分集合 $C \subset \mathcal{I}$ について $|A \cap C| \leq 1$ であること, $\mathcal{I}$ を $\max_k |\mathcal{I}_k|$ 個の全順序部分集合たちへ分割できることから従う.

この性質を一般化したものは *Sperner 性* と呼ばれる. [5] では Conjecture 4.1 を特殊なマトロイドのクラスに対して示すことにより, ある構造の Sperner 性という組合せ論的な性質に対して代数的な証明を与えた.

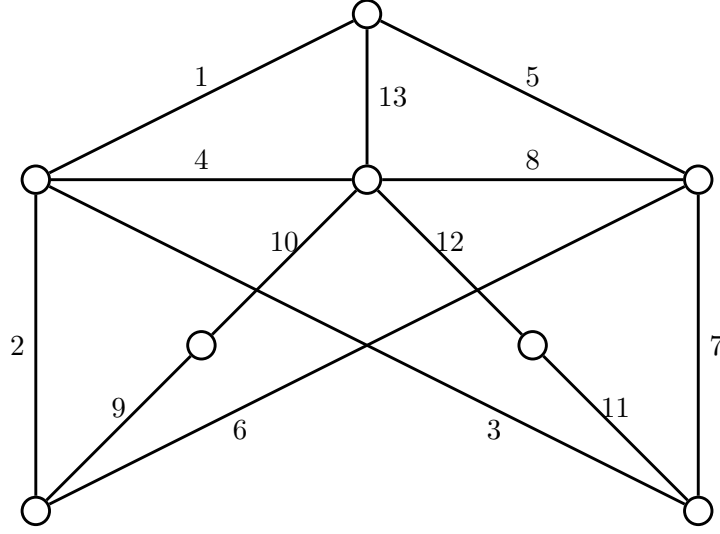


図3 反例となったグラフ G

5 主結果

Conjecture 4.1 に対し, 8 頂点 13 辺のグラフ G (図 3) であって $A = A(f_G)$ が SLP_3 を持たないものを, 数式処理システム SageMath [12] による数値計算で発見した. このとき $d = 7$ より SLP_3 の不成立は

$$\times \ell: A_3 \rightarrow A_4$$

がフルランクとなる $\ell \in A_1$ が存在しないことを表し, 従って A は弱 Lefschetz 性も持たない.

数値計算は, SageMath によって頂点数の少ないほうからグラフ G を列挙し, それぞれ $k \leq d/2$ に対して $A(f_G)$ が SLP_k を持つか判定した. この判定においては, Theorem 2.4 により次のことを行えばよい.

1. f_G を計算する
2. $A(f_G)$ の k 次部分の基底 B_k を一つ求める
3. 多項式行列 $\mathbf{H}_{B_k}(f_G)$ の正則性を確認する

このうち 1 番と 2 番, さらに 3 番の多項式行列 $\mathbf{H}_{B_k}(f_G)$ は直接計算可能である. 一方, $\mathbf{H}_{B_k}(f_G)$ は成分が n 変数 $d - 2k$ 次多項式の $\dim A_k$ 次正方行列であり, その正則性を行列式を直接計算することによって確認するのは難しい. 例えば図 3 の G に対しては $\dim A_3 = 166$ であったから, 13 変数 166 次の多項式を扱う必要が生じる.

このため, 正則性の確認には以下で述べるような乱択アルゴリズムと決定的アルゴリズムを用いた. 以降グラフ G を図 3 のものとし, $A = A(f_G)$, さらに A_3 の基底 B_3 を一つ固定して $\mathbf{H} := \mathbf{H}_{B_3}(f_G)$ とする.

5.1 乱択アルゴリズム

多項式 $g := \det \mathbf{H}$ を計算するのは難しいが、 $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $g(a_1, \dots, a_n) = \det(\mathbf{H}(a_1, \dots, a_n))$ を計算するのは $\mathbf{H}(a_1, \dots, a_n)$ が実行列であることから可能である。そしてもし $g(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ であれば、 $g \neq 0$ であることがわかる。

この手法の有用性を示すため、次のよく知られた補題を用いる。

Lemma 5.1 (Schwartz—Zippel の補題 [1, 9, 15]). $g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ を非ゼロ多項式とし、 S を $\mathbb{R}$ の有限部分集合とする。 $a_1, \dots, a_n$ を S から独立かつ一様ランダムに選んだとき、

$$\Pr[g(a_1, \dots, a_n) = 0] \leq \frac{\deg g}{|S|}.$$

実際の計算では $S = \{1, \dots, 10^9\}$ とし、 $a_1, \dots, a_n$ をランダムに選んで $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ を確かめめという計算を 100 回行った。実際、一度も $g(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ とはならなかったわけだが、もし $g \neq 0$ であるとすれば、そのようなことが発生する確率は $(166/10^9)^{100} \approx 10^{-678}$ 以下と非常に小さい。

この手法により、8 頂点のグラフ G で $A(f_G)$ が SLP_3 を持たない可能性が高いものを 152 個発見した。一方、8 頂点以下のグラフ G に対して $A(f_G)$ が常に SLP_2 を持つことも確認された。

5.2 決定的アルゴリズム

非ゼロベクトル $\mathbf{F} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^{166}$ であって $\mathbf{H}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ となるようなものがあれば、 $\mathbf{H}$ が正則でないことを示せる。そのような $\mathbf{F}$ を実際に構成することに成功した。

構成には (多変数の) 多項式補間を用いた。十分多くの点 $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ で $\mathbf{F}(a_1, \dots, a_n)$ を求めることができれば、 $\mathbf{F}$ 自体を一意的に復元することができる。どのくらい多ければよいかは $\mathbf{F}$ に現れる各変数の最大次数によって定まり、この次数もまた (1 変数の) 多項式補完を行って見積もった。

$\mathbf{F}(a_1, \dots, a_n)$ の値は、 $\mathbf{F}(a_1, \dots, a_n) \in \ker \mathbf{H}(a_1, \dots, a_n)$ であることを用いて次のようにして計算した。ただし $a_1, \dots, a_n$ は実数ではなく、それぞれ正整数であるものとする。

1. $\ker \mathbf{H}(a_1, \dots, a_n)$ がちょうど 1 次元であることを確認する
2. 非ゼロベクトル $\mathbf{F}' \in \ker \mathbf{H}(a_1, \dots, a_n)$ を一つ求める
3. $\mathbf{F}'$ に係数 $c \neq 0$ を掛けて正規化する。 c は次を満たすように定める：
 - $c\mathbf{F}'$ の各成分は整数である
 - $c\mathbf{F}'$ の成分の最大公約数は 1 である
 - $c\mathbf{F}'$ においてあらかじめ決めておいた添字の成分が正である
4. $c\mathbf{F}'$ を求める値とする

$\mathbf{F}(a_1, \dots, a_n)$ の成分の最大公約数が 1 となりやすいよう、 a_i たちは素数のべき乗から選んだ。また、あらかじめ決めておいた添字の成分は最終的に $2(x_1 + x_5 + x_{13})(x_2 + x_6)x_{10}^2x_{11}x_{12}$ へと復元された。

参考文献

- [1] R. A. Demillo and R. J. Lipton, *A probabilistic remark on algebraic program testing*, Information Processing Letters **7** (1978), no. 4, 193–195.
- [2] M. Hara and J. Watanabe, *The determinants of certain matrices arising from the Boolean lattice*, Discrete Math. **308** (2008), no. 23, 5815–5822. MR2459403
- [3] T. Harima, T. Maeno, H. Morita, Y. Numata, A. Wachi, and J. Watanabe, *The Lefschetz properties*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2080, Springer, Heidelberg, 2013. MR3112920
- [4] T. Maeno and Y. Numata, *Sperner property, matroids and finite-dimensional Gorenstein algebras*, Tropical geometry and integrable systems, Contemp. Math. **580** (2012), Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 73–84. MR2985388
- [5] ———, *Sperner property and finite-dimensional Gorenstein algebras associated to matroids*, J. Commut. Algebra **8** (2016), no. 4, 549–570. MR3566530
- [6] T. Maeno and J. Watanabe, *Lefschetz elements of Artinian Gorenstein algebras and Hessians of homogeneous polynomials*, Illinois J. Math. **53** (2009), no. 2, 591–603. MR2594646
- [7] S. Murai, T. Nagaoka, and A. Yazawa, *Strictness of the log-concavity of generating polynomials of matroids*, J. Combin. Theory Ser. A **181** (2021), Paper No. 105351, 22. MR4223331
- [8] T. Nagaoka and A. Yazawa, *Strict log-concavity of the Kirchhoff polynomial and its applications to the strong Lefschetz property*, J. Algebra **577** (2021), 175–202. MR4234203
- [9] J. T. Schwartz, *Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identities*, J. Assoc. Comput. Mach. **27** (1980), no. 4, 701–717. MR594695
- [10] E. Sperner, *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge*, Math. Z. **27** (1928), no. 1, 544–548. MR1544925
- [11] R. Takahashi, *Failure of the Lefschetz property for the Graphic Matroid*, 2025. arXiv preprint arXiv:2501.13348.
- [12] The Sage Developers, *Sagemath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.5)*, 2022. <https://www.sagemath.org>.
- [13] J. Watanabe, *A remark on the Hessian of homogeneous polynomials*, The Curves Seminar at Queen’s, vol. XIII, Queen’s Papers Pure and Appl. Math. **119** (2000), pp. 171–178.
- [14] A. Yazawa, *The eigenvalues of Hessian matrices of the complete and complete bipartite graphs*, J. Algebraic Combin. **54** (2021), no. 4, 1137–1157. MR4348920
- [15] R. Zippel, *Probabilistic algorithms for sparse polynomials*, Symbolic and algebraic computation (EUROSAM ’79, Internat. Sympos., Marseille, 1979), pp. 216–226. MR575692